

# Počítačová grafika III (NPGR010)

## Přednáška: Path tracing II

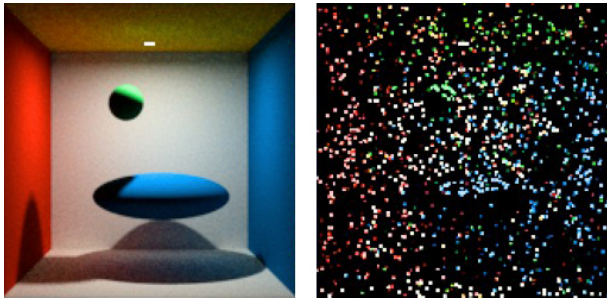
Petr Vévoda  
15. listopadu 2012

### 1 Přímé osvětlení v path traceru

Na minulé přednášce jsme si představili základní verzi algoritmu path tracing:

Pro každý pixel výsledného obrázku vrhni paprsek do scény, pokud se v místě dopadu nachází zdroj světla, započti jím emitovanou radianci, a s pravděpodobností odpovídající odrazivosti vrhni paprsek náhodně zpět do scény, kde postup rekurzivně opakuj.

V této podobě však ještě algoritmus není v praxi použitelný. Sledovaná cesta totiž nenulově přispěje k výsledku pouze tehdy, trefí-li ve svém průběhu nějaký zdroj světla. Jenže pravděpodobnost na zásah klesá se zmenšující se plochou světelného zdroje, a to až k nule pro zdroje bodové. Se snižujícím se počtem a rozměry světél ve scéně tak roste počet cest končících s prázdnou, konvergence se zpomaluje a variance vzrůstá. Obrázek 1 pak ukazuje, jakého výsledku se dočkáme u scény s jediným malým zdrojem světla.



**Obrázek 1:** Ukázka špatné konvergence základního path traceru. Vlevo referenční obrázek, vpravo výsledek při použití 150 cest na pixel. (Autor: Alexander Wilkie)

Vidíme, že náš algoritmus, jež by měl umět počítat nepřímé osvětlení, selhává již při výpočtu osvětlení přímého. Zaměříme se proto nyní na něj.

#### 1.1 Přímé osvětlení obecně

Nabízíme se dva přístupy, jak určit odraženou radianci v daném bodě způsobenou přímým osvětlením. Buď můžeme uvažovat rovnici odrazu v její úhlové formě, tzn. integrovat přes směry na hemisféře, nebo vyjít z plošné formy a integrovat přes plochu scény. První způsob vede na vzorkování BRDF, druhý na vzorkování světla.

##### 1.1.1 Vzorkování BRDF

Využíváme úhlovou formulaci rovnice odrazu, přičemž nás zajímá pouze přímé osvětlení, pročez v místech dopadu paprsků připočítáváme pouze emitovanou radianci. Pro odraženou radianci  $L_r$  ve směru  $\omega_o$  v bodě  $\mathbf{x}$  tak dostáváme vztah:

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_e(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) \cdot \cos \theta_i d\omega_i.$$

Pro odhad tohoto integrálu použijeme MC estimátor: integrand je dán, hustotu pravděpodobnosti volby směru volíme co nejpodobnější funkci  $f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) \cdot \cos \theta_i$  (odtud ono „vzorkování BRDF“). Výsledný estimátor má tvar:

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_e(r(\mathbf{x}, \omega_{i,k}), -\omega_{i,k}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{i,k}, \omega_o) \cdot \cos \theta_{i,k}}{p(\omega_{i,k})}.$$

Tzn. podle hustoty  $p$  vygenerujeme  $N$  náhodných směru  $\omega_{i,1}, \dots, \omega_{i,N}$ , vrhneme jimi paprsky z  $\mathbf{x}$ , pokud protnou nějaký zdroj světla, přičteme odpovídající člen  $L_e(\cdot) f_r(\cdot) \cos(\cdot) p(\cdot)^{-1}$  a nakonec podělíme  $N$ .

##### 1.1.2 Vzorkování světla

Využíváme plošnou formulaci rovnice odrazu, přičemž nás zajímá pouze přímé osvětlení, pročez integrujeme pouze přes plochu zdroje  $A$ . Pro odraženou radianci  $L_r$  ve směru  $\omega_o$  v bodě  $\mathbf{x}$  tak dostáváme vztah:

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA_{\mathbf{y}}.$$

Pro odhad tohoto integrálu použijeme MC estimátor: integrand je dán, hustotu pravděpodobnosti volby bodu na zdroji volíme konstantní  $|A|^{-1}$  (tj. světlo vzorkujeme uniformně). Výsledný estimátor má tvar:

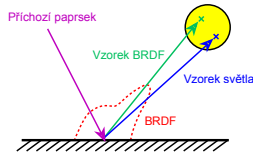
$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}).$$

Tzn. uniformně vygenerujeme  $N$  náhodných bodů na zdroji  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$ , jsou-li viditelné z  $\mathbf{x}$  (tj. je-li  $V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) = 1$ ), přičteme odpovídající člen  $|A| L_e(\cdot) f_r(\cdot) G(\cdot)$  a nakonec podělíme  $N$ .

##### 1.1.3 Vlastnosti vzorkování BRDF a vzorkování světla

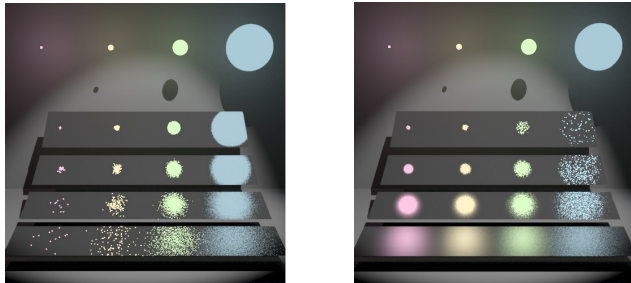
Máme dva různé korektní způsoby, jak vyřešit jeden problém, kterak spočítat odraženou radianci v daném bodě způsobenou přímým osvětlením. Kdy je vhodné použít který?

- Vzorkování BRDF - Výhodnější pro velká světla, neboť se zmenšující se plochou zdroje klesá pravděpodobnost jeho zásahu vygenerovaným paprskem, a tedy i počet nenulových sčítanců v odhadu integrálu, což ústí ve vysoký rozptyl a šum ve výsledném obrázku. Nepoužitelné pro scény osvětlené bodovými zdroji, kde kvůli nulové pravděpodobnosti jejich zásahu produkuje nulový výstup.
- Vzorkování světla - Výhodnější naopak pro světla malá (a jediná možnost pro zdroje bodové), neboť čím větší zdroj je, tím spíše padne směr odpovídající některému jeho vzorku mimo lalok BRDF, neboli jeho příspěvek k odhadu integrálu je umenšen maličkou hodnotou BRDF, důsledkem čehož je opět vysoký rozptyl a šum.



**Obrázek 2:** Srovnání vzorkování BRDF a vzorkování světla

Na obrázcích 3a a 3b je identická scéna zobrazena oběma metodami. Ve scéně se nachází čtyři různě lesklé plochy (nejvzdálenější je nejvíce lesklá, nejbližší nejvíce difúzní), které jsou osvětlené čtyřmi různě velkými zdroji. Čím je plocha více difúzní, tím je BRDF více konstantní, tím je vzorkování hemisféry při vzorkování BRDF více uniformní a tím spíše paprsek zdroj mine. Na obrázku 3a vlevo dole proto metoda vzorkování BRDF zcela selhává a výsledkem je náhodný shluk pixelů. Naproti tomu vzorkování světla ve stejné situaci funguje dobře, jelikož jsou všechny příspěvky vygenerovaných směrů násobeny takřka stejně velkými hodnotami BRDF. Pro lesklé plochy je pak výsledek přesně opačný. BRDF má jeden úzký dlouhý lalok, jenž směry vygenerované při vzorkování světla snadno minou, a na obrázku 3b vpravo nahoře tak dostaneme opět jen šum. Naopak výsledek při vzorkování BRDF je dobrý, poněvadž paprsky jsou generovány převážně v ose laloku a ten míří do zdroje právě pro ty úhly pohledu, pro které lesklý odraz zdroje očekáváme.



(a) Vzorkování BRDF

(b) Vzorkování světla



(c) MIS

**Obrázek 3:** Ukázka vzorkovacích technik. (Autor: Eric Veach)

Vidíme, že ani jedna z metod není sama o sobě univerzálně použitelná. Na druhou stranu se zjevně ideálně doplňují. Nemohli bychom je tedy nějak zkombinovat? Obě odhadují stejnou veličinu  $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$ , pouhým sečtením bychom dostali její dvojnásobek, musíme tedy na to jít chytřeji.

#### 1.1.4 Aplikace MIS na výpočet přímého osvětlení

Stačí si uvědomit, že jsme v situaci jako ušité na míru metodě MIS (Multiple importance sampling) popsané na minulém přednášce. Ta

nám pro odhad integrálu funkce  $f$  kombinací dvou vzorkovacích technik s hustotami  $p_1$  a  $p_2$ , z nichž z každé budeme brát  $N$  vzorků, nabízí tento kombinovaný estimátor:

$$F = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( w_1(X_{1,k}) \frac{f(X_{1,k})}{p_1(X_{1,k})} + w_2(X_{2,k}) \frac{f(X_{2,k})}{p_2(X_{2,k})} \right),$$

kde  $w_1$  a  $w_2$  jsou váhové funkce splňující  $\forall x : w_1(x) + w_2(x) = 1$ . Otázkou, jak tyto kombinační váhy nejlépe zvolit, jsme se rovněž zabývali na minulém přednášce a dospěli jsme k tzv. vyrovnané heuristice, která je takřka optimálním řešením co do minimalizace rozptylu estimátoru. V našem případě vede její užití na váhy:

$$w_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_1(x) + p_2(x)}, \quad w_2(x) = \frac{p_2(x)}{p_1(x) + p_2(x)}$$

a na estimátor:

$$F = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{f(X_{1,k})}{p_1(X_{1,k}) + p_2(X_{1,k})} + \frac{f(X_{2,k})}{p_1(X_{2,k}) + p_2(X_{2,k})} \right).$$

Aplikace vyrovnané heuristiky má ještě jeden důsledek, a sice, že v tuto chvíli již příspěvky vzorků nezávisí na technice, z jaké pocházejí. Po jejich přeznačení tak můžeme estimátor psát jednodušeji jako:

$$F = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{f(X_k)}{p_1(X_k) + p_2(X_k)},$$


kde vzorky  $X_1, \dots, X_N$  pocházejí z rozdělení  $p_1$  a vzorky  $X_{N+1}, \dots, X_{2N}$  z rozdělení  $p_2$ . Nyní budeme chtít za  $f$  dosadit integrand ze vztahu pro  $L_r$  a za  $p_1, p_2$  hustoty odpovídající našemu vzorkování BRDF a vzorkování světla. Zde je třeba zdůraznit, že  $f, p_1$  i  $p_2$  musí mít stejnou doménu (už jen ze syntaktického hlediska nemůže  $X_k$  na jednom místě rovnice znamenat směr a na jiném bod na zdroji). Pokud tedy za  $f$  zvolíme integrand ze vzorkování BRDF (jehož parametrem je směr):

$$f(\omega) = L_e(r(\mathbf{x}, \omega), -\omega) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega, \omega_o) \cdot \cos \theta_x,$$

můžeme za  $p_1$  použít hustotu vzorkování BRDF uvedenou v sekci 1.1.1, tedy co nejpodobnější BRDF, např. pro Lambertovskou BRDF:

$$p_1(\omega) = \frac{\cos \theta_x}{\pi}.$$

Za  $p_2$  však nemůžeme ze sekce 1.1.2 stejně snadno vzít konstantní hustotu vzorkování světla  $|A|^{-1}$ , protože její doménou jsou body na zdroji. Musíme ji nejdříve z plošné míry  $dA$  převést do míry úhlové  $d\omega$ , a to za pomoci známého vztahu  $d\omega = dA \cos \theta r^{-2}$ . Dostaneme:

$$p_2(\omega) = \frac{1}{|A|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\cos \theta_y},$$


tj. hustotu pravděpodobnosti, s jakou by byl směr  $\omega$  vygenerován, kdybychom použili vzorkování plochy zdroje. Celkově tak z  $N$  směrů získaných vzorkováním Lambertovské BRDF a  $N$  směrů získaných vzorkováním světla odhadneme odraženou radianci jako:

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{L_e(r(\mathbf{x}, \omega_k), -\omega_k) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_k, \omega_o)}{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{|A|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\cos \theta_y}}.$$

Analogicky bychom postupovali pro volbu integrandu ze vzorkování světla. Hustotu  $p'_2$  bychom vzali rovnou, pro  $p'_1$  by byl nutný převod.

Na obrázku 3c vidíme výsledek našeho úsilí, kombinací obou vzorkovacích technik pomocí MIS jsme konečně dosáhli správného výsledku. Obrázek 4 pak nabízí ještě jednu ukázkou. Nejdříve je scéna opět vyrenderována užitím každé z technik zvlášť. Jak bychom očekávali, při vzorkování BRDF roste šum se vzdáleností od zdroje, kdy už se generované paprsky do něj stále hůře tre-fují. Šum v těsném sousedství zdroje při vzorkování světla není ani tak dán tím, že by směry odpovídající generovaným bodům na zdroji míjeli lalok BRDF (povrch celé scény je difúzní), nýbrž velkým rozptylem vzdáleností mezi body na stěně a pro ně vygenerovanými vzorky na zdroji. Vzhledem k uniformnímu vzorkování zdroje totiž může být jednou vzat vzorek světla z jednoho konce a hned pro sousední bod na zdi vzorek z konce opačného. Úbytek příspěvku vzorku s kvadrátem vzdálenosti (viz geometrický člen v estimátoru při vzorkování světla) pak znamená šum v odhadu a tedy i v obrázku. Obě techniky proto zkombinujeme pomocí MIS užitím vhodných vah. Jak ukazuje 4b, aritmetický průměr je nevhodný, zachovává špatné vlastnosti obou. Oproti tomu na 4c vidíme, že při použití vyrovnané heuristiky váhy jejich slabé stránky potlačují a dobře se doplňují, což potvrzuje i poslední obrázek 4d.

Úspěšně jsme vyřešili přímé osvětlení obecně, nyní je načase použít tyto poznatky k vylepšení našeho path traceru.

## 1.2 Použití MIS v path traceru

Základní path tracer v každém vrcholu sledované cesty, pokud se nerozhodl ji ukončit, pro výpočet odražené radiance vrhl podle BRDF paprsek do scény a v místě jeho dopadu mimo jiné započítal emitovanou radianci, jestliže trefil zdroj. To je ale přesně princip výpočtu přímého osvětlení metodou vzorkování BRDF. O ní víme, že ne vždy podává dobré výsledky, a že existuje metoda vzorkování světla, která se s ní ideálně doplňuje. Je tedy snadné přidat do path traceru právě vzorkování světla. K tomu nám bude stačit jedině: v každém vrcholu  $\mathbf{x}$  vyšleme navíc jeden stínový paprsek směrem do zdroje (přesněji náhodně zvolíme bod  $\mathbf{y}$  na zdroji a spojíme). Ten ve zdroji skončí (cesty se tedy exponenciálně nevětví) a příspěvek zdroje se připočte již známým způsobem pomocí MIS a vyrovnané heuristiky. Zatímco však tento stínový paprsek přispívá pouze k přímému osvětlení, původní pokračovací paprsek ve směru  $\omega_{\text{pok}}$  přispívá také k osvětlení nepřímému. Jen přímé osvětlení je ale počítané pomocí kombinovaného estimátoru, tudíž MIS váhy se použijí pouze na přímé osvětlení a osvětlení nepřímé se připočte celé. Při výpočtu MIS vah je pak navíc potřeba vzít v úvahu pravděpodobnost přežití cesty  $\rho$  (ruskou ruletu). Tedy:

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{L_e(r(\mathbf{x}, \omega_{\text{pok}}), -\omega_{\text{pok}}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{\text{pok}}, \omega_o) \cdot \cos \theta_{\text{pok}}}{\rho \cdot (p_1(\omega_{\text{pok}}) + p_2(\omega_{\text{pok}}))} + (1)$$

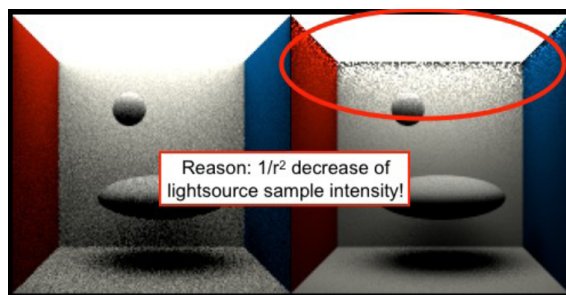
$$\frac{L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x})}{p'_1(\mathbf{y}) + p'_2(\mathbf{y})} + (2)$$

$$\frac{\hat{L}_r(r(\mathbf{x}, \omega_{\text{pok}}), -\omega_{\text{pok}}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{\text{pok}}, \omega_o) \cdot \cos \theta_{\text{pok}}}{\rho \cdot p_1(\omega_{\text{pok}})} (3)$$

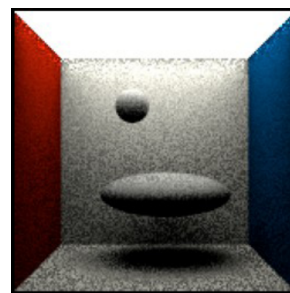
kde 1 je příspěvek k přímému osvětlení pokračovacího paprsku ze vzorkování BRDF, 2 je příspěvek k přímému osvětlení stínového paprsku ze vzorkování zdroje (není-li zastíněn) a 3 je příspěvek pokračovacího paprsku k osvětlení nepřímému.

Pro použitelnost našeho path traceru je důležité zodpovědět ještě jednu otázku: co když bude ve scéně více zdrojů světla? Je zřejmé, že na vzorkování BRDF nemá počet světel vliv, ale v případě vzorkování světla jsme se bavili pouze o jediném zdroji. Nabízí se dvě řešení:

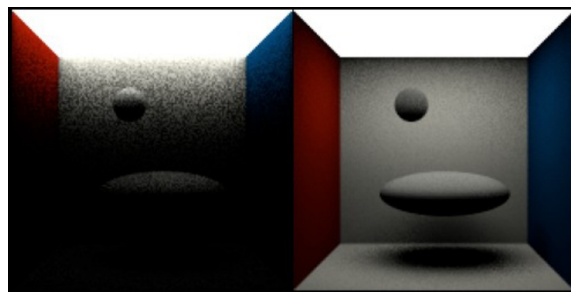
- Poslat stínový paprsek ke každému zdroji světla. Tento způsob může být nepraktický při vyšším počtu světel (100+).



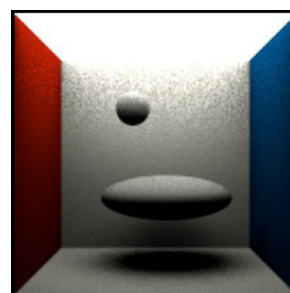
(a) Vlevo  $1 \cdot BRDF + 0 \cdot SVĚTLO$ , vpravo  $0 \cdot BRDF + 1 \cdot SVĚTLO$



(b)  $1/2 \cdot BRDF + 1/2 \cdot SVĚTLO$



(c) Vlevo  $w_1 \cdot BRDF + 0 \cdot SVĚTLO$ , vpravo  $0 \cdot BRDF + w_2 \cdot SVĚTLO$



(d)  $w_1 \cdot BRDF + w_2 \cdot SVĚTLO$

**Obrázek 4:** Ukázka použití různých vah při kombinaci vzorkování BRDF a vzorkování světla v difúzní scéně. Vzorkovací techniky jsou značeny jako BRDF a SVĚTLO. (Autor: Alexander Wilkie)

- Nejdříve vybrat náhodně jeden zdroj (ideálně s pravděpodobností podle výkonu) a na něm teprve náhodně vybrat bod určující stínový paprsek. Pravděpodobnost výběru zdroje však ovlivňuje hustoty (a tedy i váhy) v MIS.

Druhá metoda bývá často lepší. Dobrou heuristikou může být její použití až po prvním nelesklém odrazu, zatímco pro všechny ostatní vrcholy cesty počítat přímé osvětlení od všech zdrojů světla.

## 2 Generování z distribuce

Pro Importance sampling a tedy i pro výše uvedené postupy je klíčový předpoklad, že umíme generovat vzorky z dané distribuce. Tu typicky dostáváme jako hustotu pravděpodobnosti a potřebujeme vygenerovat vzorky s odpovídajícím rozdělením. Počítač nám však poskytuje pouze generátor náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení, jak tedy získat jiná? Rozebereme si jednotlivé případy.

### 2.1 Diskrétní náhodná veličina

#### 2.1.1 1D

Nechť je dána pravděpodobnostní funkce  $p$ ,  $p(i)$  necht' značí pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina nabude  $i$ -té hodnoty ze své domény. Snadno spočítáme distribuční funkci  $P$  (platí  $P(i) = \sum_{j=1}^i p(j)$ ), generování vzorku pak probíhá následovně:

1. Vygeneruj  $u$  z  $R(0, 1)$
2. Vyber  $x_i$  takové, že  $P(i-1) < u \leq P(i)$  (dodefinováváme  $P(0) = 0$ )

Jak můžeme vidět na obrázku 5a, pravděpodobnost, že vybereme  $x_2$ , odpovídá rozdílu výšek sloupečků u  $x_2$  a  $x_1$ , což je z definice distribuční funkce  $P$  právě pravděpodobnost  $p(2)$ . Nalezení  $i$  z kroku 2 se v praxi provádí půlením intervalu.

#### 2.1.2 2D

Nechť je dána sdružená pravděpodobnostní funkce  $p_{I,J}$ ,  $I, J$  značí náhodný vektor dimenze 2. Na doménu 2D diskretní náhodné veličiny se lze dívat jako na 2D tabulku, jejímž políčkům funkce  $p_{I,J}$  přiřazuje pravděpodobnost. Jedním z možných řešení je tuto tabulku zlinearovat (např. diagonální metodou), čímž obdržíme 1D distribuci, kterou již vzorkovat umíme. Druhým, zpravidla lepším řešením je vzorkovat po složkách, tzn. nejdříve vygenerovat index řádku  $i_{sel}$  podle marginálního 1D rozdělení popsaneho pravděpodobnostní funkcí

$$p_I(i) = \sum_{j=1}^{n_J} p_{I,J}(i, j)$$

a poté vygenerovat sloupec  $j_{sel}$  podle podmíněného 1D rozdělení příslušejícího vybranému řádku  $i_{sel}$

$$p_{J|I}(j|I = i_{sel}) = \frac{p_{I,J}(i_{sel}, j)}{p_I(i_{sel})}$$

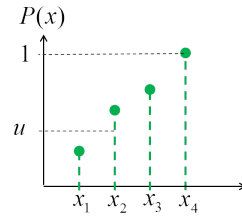
Tento postup je korektní, prvek na pozici  $(i, j)$  totiž vygenerujeme s pravděpodobností

$$p_I(i) \cdot p_{J|I}(j|I = i) = p_I(i) \cdot \frac{p_{I,J}(i, j)}{p_I(i)} = p_{I,J}(i, j)$$

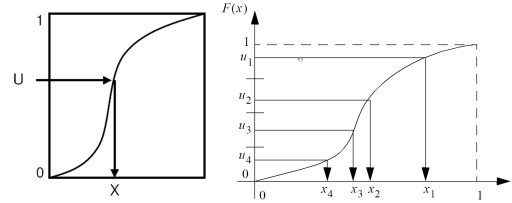
### 2.2 Spojitá náhodná veličina

#### 2.2.1 1D

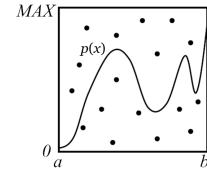
Ve spojitém případě máme dvě možnosti. První je transformační metoda stavící na tvrzení, že je-li  $U$  náhodná veličina s rozdělením  $R(0, 1)$ , potom náhodná veličina  $X = P^{-1}(U)$  má rozdělení popsane distribuční funkcí  $P$ . Neboli jedná se o analogii řešení diskretního případu, kdy generujeme z rovnoměrného rozdělení a hledáme vzor v distribuční funkci (srovnejme obrázky 5a a 5b). Problémem je, že pro spojitou náhodnou veličinu je nalezení distri-



(a) Transformační metoda pro diskretní případ



(b) Transformační metoda pro spojitý případ (vlevo princip, vpravo kombinace se stratifikací)



(c) Zamítací metoda pro spojitý případ

**Obrázek 5:** Ilustrační obrázky k metodám generování vzorků z dané distribuce. (Autor: Jaroslav Křivánek)

buční funkce obecně podstatně těžší (znamená to integrovat hustotu), o její inverzi ani nemluvě. Tento postup se tedy hodí pro situace, kdy jsme schopni nalézt  $P^{-1}$  analyticky. Jeho předností je pak snadná kombinace se vzorkováním po částech (stratifikací), které se provede už při generování z  $R(0, 1)$  a transformace inverzní distribuční funkcí jeho dobré vlastnosti zachová (viz obrázek 5b).

Druhou možností je tzv. zamítací metoda (rejection sampling). Necht' je hustota  $p$  definována na intervalu  $[a, b]$ , na kterém nabývá nejvýše hodnotu  $MAX$ . Generování pak probíhá následovně:

1. Vyber náhodně  $u_1$  z  $R(a, b)$
2. Vyber náhodně  $u_2$  z  $R(0, MAX)$
3. Pokud je  $u_2 < p(u_1)$ , vzorek  $u_1$  přijmi

Na obrázku 5c to znamená, že vzorky nad funkcí se zahodí a ze zbylých se vezme první souřadnice. Je zřejmé, že čím je v daném bodě hustota větší, tím více vzorků se pod ni treť a tím více bude tento bod přijímán. Přijaté vzorky tedy skutečně mají rozložení dané hustotou  $p$ . Výhodou této metody je, že nám stačí umět vyhodnotit hustotu v bodě a shora ji omezit, nepotřebujeme ji integrovat ani počítat inverzi distribuční funkce. V praxi často analytické vyjádření hustoty nemáme a pak je zamítací metoda jedinou možností. Na druhou stranu transformační metoda bude vždy efektivnější, nedochází u ní k žádnému plýtvání vygenerovanými náhodnými čísly, zatímco účinnost zamítací metody, tj. procento přijatých vzorků, odpovídá poměru plochy pod funkcí ku celkové ploše a pro nekonzstantní hustotu bude vždy menší než 1. Skutečností, že dopředu nevíme, kolik náhodných čísel bude nutné vygenerovat, než dostaneme vzorek, je poté zapotřebí přizpůsobit i návrh příslušných procedur path traceru.

## 2.2.2 2D

Nechť je dána sdružená hustota  $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$ . Postup je zcela analogický diskrétnímu případu. Nejdříve tedy vygenerujeme  $x_{sel}$  podle marginální hustoty

$$p_X(x) = \int p_{X,Y}(x,y)dy$$

a poté  $y_{sel}$  podle podmíněné hustoty

$$p_{Y|X}(y|X = x_{sel}) = \frac{p_{X,Y}(x_{sel},y)}{p_X(x_{sel},y)}.$$

## 2.3 Transformační vzorce

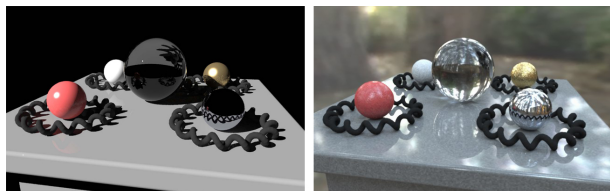
Nejen výše uvedené, ale celou řadu dalších vzorců a rovnic nějak souvisejících s globálním osvětlením lze nalézt na jednom místě v Global Illumination Compendium [Dutré 2003].

## 3 Image-based lightning

Image-based lightning je označení pro metodu, při níž je scéna osvětlena použitím naměřeného reálného světla, a to pomocí mapy prostředí. Místo bodových a plošných zdrojů ve scéně je zdrojem nekonečně velká koule kolem scény, na kterou je namapován obraz reálného prostředí. Ten může být získán jednoduše vyfotografováním, musí se však vzhledem k potenciálně obrovskému dynamickému rozsahu jednat o HDR snímky. Jedním z možných postupů je vyfotografovat dva snímky odrazu prostředí v zrcadlově lesklé kouli vůči sobě pootočené o  $90^\circ$ . Po jejich registraci vznikne kruhová mapa prostředí, používají se ale i jiné, viz obrázek 6. Obrázek 7 pak dokládá významný dopad použití Image-based lightning na věrohodnost scény oproti osvětlení jedním bodovým zdrojem. Lépe lze při něm rozlišit materiály, je pro člověka přirozenější. Dnes se již jedná o standard ve světě filmu, her.



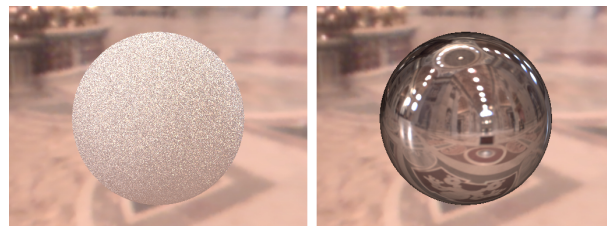
**Obrázek 6:** Ukázka různých způsobů mapování 3D směrem do 2D souřadnic mapy prostředí. Vlevo kruhová mapa, jejíž střed odpovídá směru přímo vpřed, obvod odpovídá směru přímo vzad a vodorovná linie procházející středem lineárně mapuje azimut na pixely. Uprostřed rozložení koule do roviny (shora dolů polární úhel, vodorovně azimut). Podobně jako kouli lze i krychli chápat jako množinu směrů z jejího středu, rozložením jejího pláště do roviny vznikne mapa vpravo. (Autor: Paul Debevec)



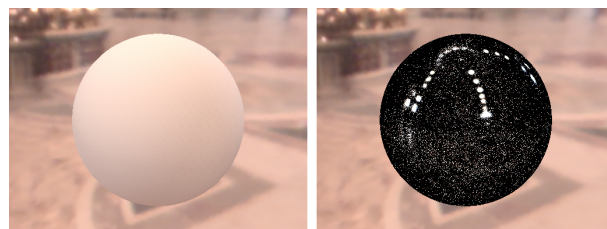
**Obrázek 7:** Srovnání osvětlení identické scény jedním bodovým zdrojem (vlevo) a mapou prostředí z obrázku 6 (vpravo). (Autor: Paul Debevec)

Samotný výpočet osvětlení se přitom zásadně neliší od dosud probraného. Mapu prostředí můžeme chápat jako funkci směru na sféře  $L(\omega)$  vracející hodnotu radiance emitovanou prostředím ve směru  $-\omega$ . Odražená radiance v bodě  $\mathbf{x}$  ve směru  $\omega_o$  je stále integrál  $L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_e(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o) \cdot \cos \theta_i d\omega_i$  s tím rozdílem, že příspěvky paprsků, které minuly objekty scény, nejsou nulové, nýbrž se použije  $L(\omega_i)$ . Tzn. jsme opět u integrálu přes hemisféru, který budeme odhadovat metodou MC, což opět povede na dvě vzorkovací techniky a jejich kombinaci pomocí MIS.

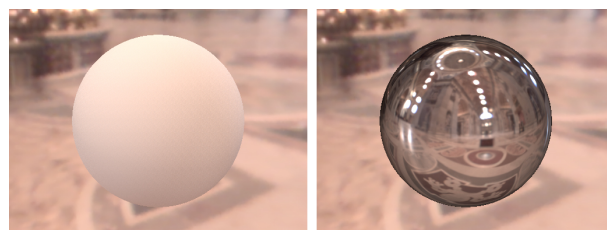
Jednou z technik je známé vzorkování BRDF, kdy generujeme paprsky podle BRDF, přičemž pokud nezasáhnou žádný objekt, použije se intenzita definovaná mapou prostředí. Jak vidíme na obrázku 8a, výsledky jsou opět dobré u lesklého povrchu, zatímco při vzorkování konstantní BRDF difúzního povrchu se paprsky špatně trefují do jasných míst mapy a vzniká šum. Druhou technikou je analogie k vzorkování světla a sice vzorkování mapy prostředí. Místo bodů na zdroji generujeme pixely mapy a to s pravděpodobností úměrnou jejich intenzitě. Přesnější intenzita mapy prostředí definuje hustotu na jednotkové kouli. Tu pro účely vzorkování aproximujeme jako 2D diskrétní distribuci nad pixely mapy. Pravděpodobnost výběru pixelu je pak dána součinem jeho intenzity a jeho velikosti na jednotkové kouli (závisí na mapování). Neboli jasnější místa mapy (oblohu, světla...) vzorkujeme s větší pravděpodobností (detaily viz [Pharr and Humphreys 2010]). Obrázek 8b ukazuje, že stejně jako vzorkování světla tato technika dobře funguje pro difúzní povrchy, ale selhává u lesklých, kde paprsky odpovídající vygenerovaným bodům často mívají úzký lalok BRDF. Řešením je MIS, výsledek vidíme na obrázku 8c.



(a) Vzorkování BRDF, 600 vzorků



(b) Vzorkování mapy prostředí, 600 vzorků



(c) MIS, 300 vzorků BRDF + 300 vzorků mapy prostředí

**Obrázek 8:** Srovnání vzorkovacích technik. Na levém obrázku vždy ideálně difúzní povrch, na pravém dokonalé zrcadlo. (Autor: Paul Debevec)

## A Příklad: Importance sampling Phongovy BRDF

Připomeňme fyzikálně věrohodnou Phongovu BRDF:

$$f_r^{\text{Phong}}(\omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{\rho_d}{\pi} + \frac{n+2}{2\pi} \rho_s \cos^n \theta_r,$$

kde:

$$\begin{aligned} \cos \theta_r &= \omega_o \cdot \omega_r \\ \omega_r &= 2(\omega_i \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \omega_i \\ \rho_d + \rho_s &\leq 1. \end{aligned}$$

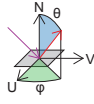
Nechť paprsek dopadne na plochu s Phongovou BRDF. Jak vygenerovat sekundární paprsek pro vzorkování nepřímého osvětlení? V path traceru je vrhán vždy nejvýše jeden sekundární paprsek, musíme si tedy zvolit, jakou komponentu BRDF budeme vzorkovat, tj. zvolit druh interakce (difúzní/lesklý odraz). Kód realizující volbu interakce:

```
pd = max(rhoD.r, rhoD.g, rhoD.b);
ps = max(rhoS.r, rhoS.g, rhoS.b);
pd /= (pd + ps); // pravd. výběru difúzní komponenty
ps /= (pd + ps); // pravd. výběru lesklé komponenty

Vec3 dir, float pdf, Col brdfVal;
if (rand(0,1) <= pd)
{dir, pdf, brdfVal} = sampleDiffuse();
return {dir, pdf * pd, brdfVal}
else
{dir, pdf, brdfVal} = sampleSpecular();
return {dir, pdf * ps, brdfVal}
```

Pro vzorkování difúzního odrazu použijeme Importance sampling s hustotou  $p(\theta) = \cos(\theta)/\pi$ , kde  $\theta$  je úhel mezi normálou a vygenerovaným sekundárním paprskem. Pro generování směrů podle této hustoty bychom v [Dutré 2003] (odvození viz [Pharr and Humphreys 2010]) našli následující vztahy využívající čísel  $r_1, r_2$  náhodně vygenerovaných z  $R(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi r_1 & u &= \cos(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2} \\ \theta &= \arccos(\sqrt{r_2}) & v &= \sin(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2} \\ n &= \sqrt{r_2} \end{aligned}$$



Toto vzorkování provádí procedura sampleDiffuse:

```
// zkonstruu lokální souřadnicový systém s normálou N jako osou z
Vec3 U = arbitraryNormal(N); // U je kolmé na N
Vec3 V = crossProd(N, U); // ortonormální báze s N a U

// generuj směr v lokálním souřadnicovém systému
float r1 = rand(0,1), r2 = rand(0,1);
float sinTheta = sqrt(1 - r2);
float cosTheta = sqrt(r2);
float phi = 2.0*PI*r1;
float pdf = cosTheta/PI;

// převed' do kartézských souřadnic ([phi, theta] -> [U,V,N])
Vec3 ldir (cos(phi)*sinTheta, sin(phi)*sinTheta, cosTheta);

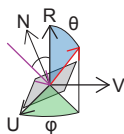
// transformuj do globálního souřadnicového systému ([U,V,N] -> [X,Y,Z])
Vec3 gdir = ldir.x * U + ldir.y * V + ldir.z * N

// spočítej difúzní komponentu BRDF
Col brdfVal = rhoD / PI;

return {gdir, pdf, brdfVal}
```

Pro vzorkování difúzního odrazu použijeme Importance sampling s hustotou  $p(\theta) = (n+1)/(2\pi) \cos^n(\theta)$ , kde  $\theta$  je úhel mezi ideálně zrcadlově odraženým  $\omega_o$  a vygenerovaným sekundárním paprskem. Pro generování směrů podle této hustoty bychom v [Dutré 2003] našli následující vztahy využívající čísel  $r_1, r_2$  náhodně vygenerovaných z  $R(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi r_1 & u &= \cos(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2^{\frac{2}{n+1}}} \\ \theta &= \arccos(r_2^{\frac{1}{n+1}}) & v &= \sin(2\pi r_1) \sqrt{1 - r_2^{\frac{2}{n+1}}} \\ r &= r_2^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$



Toto vzorkování provádí procedura sampleSpecular:

```
// zkonstruu lokální souřadnicový systém s R jako osou z
Vec3 R = 2*dot(N,wi)*N - wi; // směr ideálního odrazu
Vec3 U = arbitraryNormal(R); // U je kolmé na R
Vec3 V = crossProd(R, U); // ortonormální báze s R a U

// generuj směr v lokálním souřadnicovém systému
{Vec3 ldir, float pdf} = rndHemiCosN(n); // použití vztahů popsaných výše

// transformuj do globálního souřadnicového systému ([U,V,R] -> [X,Y,Z])
Vec3 gdir = ldir.x * U + ldir.y * V + ldir.z * R

// pokud jde směr pod povrch (pod tečnou rovinu), zamítni (vrať nulovou barvu)
float cosThetaIn = dot(N, gdir);
if(cosThetaIn <= 0) return {gdir, pdf, Col(0)};

// spočítej lesklou komponentu BRDF
Col brdfVal = rhoS * (n+2)/(PI*2) * pow(ldir.z, n); // ldir.z=cos_theta_r

return {gdir, pdf, brdfVal}
```

Předchozí příklad vybíral komponentu podle odrazivosti. Alternativní strategií je vybrat nejdříve směr podle každé BRDF komponenty a teprve následně podle pravděpodobnosti dané hodnotou BRDF komponenty ve vygenerovaném směru vybrat komponentu. Tento přístup nepotřebuje odrazivost  $\rho$  komponenty, na druhou stranu může být pro mnoho BRDF komponent neefektivní.

## Reference

- DUTRÉ, P., 2003. Global illumination compendium. <http://people.cs.kuleuven.be/~philip.dutré/GI>.
- PHARR, M., AND HUMPHREYS, G. 2010. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*, second ed. Morgan Kaufmann.